Tentamen i Matematisk fysik FTF131

Måndagen 13 januari 2020

Examinator: Henrik Johannesson, tel. 0768 237042.
Inga hjälpmedel är tillåtna på denna tentamen.

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.

Strukturera Dina lösningar noggrant. **Uppställda samband skall motiveras**, gärna med en översiktlig skiss av tankegång och bärande element! Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

1. Kursen har panorerat över ganska stora områden av matematiken och dess fysiktillämpningar och du har haft anledning att fundera över ett antal nya (och gamla!) begrepp. Några exempel: *responsfunktion, principalvärde, essentiell singularitet, singulär gräns, grensnitt, Fredholmalternativet, separabel integralkärna, Neumannserie, fraktal, Lebesgueintegral, Lagrangemultiplikator, vägintegral, ekvivalensrelation, kvotgrupp, konjugatklass, definierande representation, topologisk mångfald, fiberknippe,...* Listan kan göras lång! Välj *tre* av de listade begreppen och ge deras definitioner. Nämn sedan ytterligare *två* begrepp från kursen vilka du tycker saknas från listan och ge deras definitioner.

2. (a) Schrödingerekvationen för en fri partikel i en dimension med massan m och vågfunktionen $\psi(x,t)$ kan skrivas $L_{x,t}\,\psi(x,t) = 0$ där

$$L_{x,t} \equiv \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

är *Schrödingeroperatorn.* Bestäm den retarderade Greenfunktionen

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} G(k,t)dk$$

till Schrödingeroperatorn. (Du behöver inte utföra integrationen över k.)

(b) Schrödingeroperatorn har samma formella struktur som den operator som definierar värmeledningsekvationen (vilken du studerade i en av inlämningsuppgifterna). Till skillnad från den senare så innehåller dock Schrödingeroperatorn en komplexvärd koefficient. Detta har som följd att man kan konstruera en avancerad Greenfunktion till Schrödingeroperatorn men inte till operatorn som definierar värmeledningsekvationen. Kan du förklara varför?

3. Betrakta Fredholms integralekvation

$$u(x) = \lambda \int_0^1 (1 - 3xy) u(y) dy.$$

För vilka värden på λ är $u(x) = 0$ för alla reella x?

4. Betrakta svängningarna hos ett homogent membran beskrivet av funktionen $u(\boldsymbol{r}, t)$, där $\boldsymbol{r} = (x, y)$ är en ortssvektor och $t > 0$ är en tidsvariabel. Membranets energitäthet $\epsilon(\boldsymbol{r}, t)$ vid tiden t ges av

$$\epsilon(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(\boldsymbol{r}, t) \right)^2 + \frac{s}{2} \left((\frac{\partial}{\partial x} u(\boldsymbol{r}, t))^2 + (\frac{\partial}{\partial y} u(\boldsymbol{r}, t))^2 \right),$$

där ρ och s är materialkonstanter. Härled rörelseekvationen för membranet från minsta verkans princip.

5. (a) Definiera vad som menas med en *irreducibel representation* av en grupp. Kan du ge något argument varför irreducibla representationer är viktiga när man gör teoretisk fysik?

(b) *Varje irreducibel representation av en Abelsk grupp är endimensionell.* Sant eller falskt? Motivera ditt svar! [1]

(c) *En irreducibel representation av en grupp G, begränsad till en delgrupp H till G, bildar också en irreducibel representation av H.* Sant eller falskt? Motivera ditt svar!

[1] Ledning: Du kan utnyttja ett av Schurs lemmor!

LÖSNINGAR
TENTAMEN I MATEMATISK FYSIK FTF131
13/1 2020

1. Se föreläsningsanteckningar

2a) $$L_{x,t} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\hbar\partial_t$$

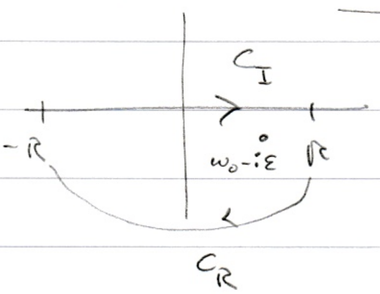
$$L_{x,t}\,G(x,t) = \delta(x)\delta(t) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} G(x,t) = \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx-i\omega t}\,G(k,\omega)\,dk\,d\omega \\[2ex] \delta(x)\delta(t) = \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx-i\omega t}\,dk\,d\omega \end{cases} \qquad (2)$$

$$(1)\ \&\ (2) \Rightarrow G(k,\omega) = \frac{1}{\hbar}\,\frac{1}{\omega - \hbar^2k^2/2m} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk\,\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,\frac{1}{\hbar}\,\frac{1}{\omega - \frac{\hbar^2k^2}{2m}}\,d\omega}_{\text{I beräknas med residykalkyl: pol i } \omega=\omega_0=\frac{\hbar^2k^2}{2m}} \qquad (4)$$

Retarderad Greenfunktion: Puffa ned polen i undre halvplanet där Jordans lemma gäller ($\mathrm{Re}(-i\omega t) < 0$ då $t>0$).



$$\int_{C_I}\dots + \cancel{\int_{C_R}\dots} = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,[f(z)]_{z=\omega_0-i\varepsilon}$$

$\cancel{\int_{C_R}\dots} \to 0$

$$\xrightarrow[\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}]{} \frac{2\pi i}{\hbar}\,e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t}$$

SVAR: $$G^R(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\left(-\frac{i}{\hbar}\,e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t}\,\Theta(t)\right)dk$$

$\Theta(t)$: stegfunktion

b) Den Fouriertransformerade Greenfunktionen för värmeledningsekvationen har en pol på negativa imaginära axeln $\longrightarrow$ kan ej puttas upp i övre halvplanet $\longrightarrow$ kan ej definiera en avancerad Greenfunktion

3) $u(x) = \lambda \int_0^1 (1-3xy)\,u(y)\,dy$

Separabel kärna: $1-3xy = \sum_{j=1}^{2} M_j(x) N_j(y)$

$M_1 = N_1 = 1$, $M_2 = -3x$, $N_2 = y$

$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{2} c_j M_j(x)$ $\leftarrow$ $c_j = \int_0^1 N_j(y) u(y)\,dy$

$\Rightarrow c_i = \lambda \sum_{j=1}^{2} a_{ij} c_j$ $\leftarrow$ $a_{ij} = \int_0^1 N_i(x) M_j(x)\,dx$

$\Rightarrow (1-\lambda A)c = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 1$, $a_{12} = -\frac{3}{2}$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 0$

Icke-trivial lösning om $\det(1-\lambda A) = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda = \pm 2$$

SVAR: Trivial lösning, dvs. $u(x) = 0 \ \forall x$, om $\lambda \neq \pm 2$

4) $$S = \int_0^t \int_\Omega \left(\underbrace{\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}_{\mathcal{E}_k} - \underbrace{\frac{S}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)}_{\mathcal{E}_p} \right) \underbrace{dt\,dx\,dy}_{\text{oberoende variabler}}$$

Obs! − tecken! Lagrangefunktion!

$$\left(\begin{aligned} \mathcal{E}_k &= \text{kinetisk energitäthet} \\ \mathcal{E}_p &= \text{potentiell energitäthet} \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p \end{aligned}\right)$$

<u>Euler</u>: $$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial u}}_{\text{integrand}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{x_i}}\right) \qquad (x_1 = t,\ x_2 = x,\ x_3 = y)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial u_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)$$

$$= 0 \quad \left(\text{ty } \frac{\partial F}{\partial u} = 0\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0}$$

5a) Föreläsningsanteckningar!

b) Sant. Argument: $D(g)D(h) = D(h)D(g) \quad \forall h, g \in G$
$\Rightarrow D(g) = \lambda \mathbb{1}$ (Schur 1)

c) Falskt. Argument: Låt D vara en irrep till G. Det kan mycket väl vara så att det finns en bas i vilken $D(h)$ är blockdiagonal $\forall h \in H$, men inte säkert i hela G.